正作用素のdeterminantに関する不等式 (作用素の不等式とその周辺)

藤井, 淳一

藤井, 淳一. 正作用素のdeterminantに関する不等式 (作用素の不等式とその周辺). 数理解析研究所講究録 1999, 1080: 140-148

数理解析研究所講究録
1080巻 1999年 140-148

正作用素の determinant に関する不等式

大阪教育大学　藤井淳一　(Jun Ichi Fujii)

まずこの議論は [5,6] のサーベイで、泉野先生及び瀬尾先生との共同研究であることをお断りしておく。

Fuglede-Kadison[2,3] は、II_1 factor において determinant を次のように定義した：

$$\Delta(A)=\exp\mathrm{Tr}(\log|A|).$$

通常の行列式と同様の性質を持つことが示されているが、この定式化は「トレースの正規化・作用素の正定値化」という点で、行列の場合の拡張にはなっていない。特に、正作用素でない場合はずいぶん違う概念になっているように思われる。そこで、ここでは話を正作用素に限って、別の方向への拡張について考察する。

比較のために Tr を通常の行列のトレースとし、A を n 次正定値行列とすれば、$\sigma(A)=\{t_1,\cdots,t_n\}$ に対し、

$$\det(A)=\exp\mathrm{Tr}(\log A)=\prod_{i=1}^{n}t_n$$

であるが、上記の determinant では、$\prod_{i=1}^{n}t_n^{1/n}$ 即ち幾何平均であると解釈できる。作用素の determinant を考える方向としては、行列の場合をそのまま拡張して発散しない場合を扱うものと、上記のように正規化によって、

発散の議論を避けるものとに分けられるが、ここでは、後者の場合に絞ることにより、固有値の幾何平均として determinant を捉え直してみたい。

そこで、単位ベクトル x と正可逆作用素 A について **determinant** を

$$\Delta_x(A) = \exp\langle(\log A)x, x\rangle$$

と定義しよう（もちろん vector state でなく、通常の state や trace でも同様の議論が可能であるが、後者は Fuglede-Kadison に含まれてしまう)。可逆性は、determinant の意味からしても、0 にならない場合を考えたいので仮定としては自然だろう。

するとすぐに分かることは、$t > 0$ について

$$\Delta_x(tA) = t\Delta_x(A), \qquad \Delta_x(t) = t.$$

という言わば affine 性である。さらに、

定理１． 写像 $A \mapsto \Delta_x(A)$ は連続で単調:

$$A \leq B \Longrightarrow \Delta_x(A) \leq \Delta_x(B).$$

がわかる。もちろん、写像 $x \mapsto \Delta_x(A)$ も連続である（ノルム位相)。

特に行列の場合を含めて、$\sum_{i=1}^n E_i = 1$ となる射影 E_i について

$$\Delta_x\left(\sum_{i=1}^n t_i E_i\right) = \prod_{i=1}^n t_i^{\langle E_i x, x\rangle}$$

となることがすぐに分かるので、定理 1 で近似すれば、この determinant はスペクトルに対する「(連続版) 加重幾何平均」であるといえるだろう。

この視点から見れば、当然「調和-幾何-算術平均不等式」は次のようになる：

定理２. $\langle A^{-1}x, x\rangle^{-1} \leq \Delta_x(A) \leq \langle Ax, x\rangle$.

系. $\|A^{-1}\|^{-1} \leq \Delta_x(A) \leq r(A) = \|A\|$.

上記の平均は、さらに **power (arithmetic) mean** と呼ばれる次の平均によって結ばれている（$-1 \leq r \leq 1$）：

$$M[r](x_1, ..., x_n) = \left(\frac{x_1^r + \cdots + x_n^r}{n}\right)^{1/r}$$

実際、$r = -1$ のとき調和平均 $r = 1$ のとき算術平均で $r = 0$ (厳密には $r \to 0$) のとき幾何平均になり、単調に増加する平均になっている。こうみれば、当然定理２を一般化した次の公式が得られる：

定理３.

$$M[t]_x(A) \equiv \langle A^t x, x\rangle^{1/t} \downarrow \Delta_x(A) \qquad (t \downarrow 0)$$

$$M[t]_x(A) \equiv \langle A^t x, x\rangle^{1/t} \uparrow \Delta_x(A) \qquad (t \uparrow 0)$$

一方、作用素平均の久保安藤理論 [10] において「双対」の概念があった：

$$Am^*B = (A^{-1}mB^{-1})^{-1}$$

この概念を、$M[r]_x^*(A) = \langle A^{-r}x, x\rangle^{-1/r}$ と準用すれば、

$$M[r]_x^* = M[-r]_x$$

であることがわかり、特に幾何平均の自己双対性より、

自己双対性： $$\Delta_x(A^{-1}) = \Delta_x(A)^{-1}$$

が分かる。さらに determinant 周辺の不等式を見ていくと、

Ky Fan 型不等式. $\alpha, \beta > 0, \alpha + \beta = 1$

$$\Delta_x(\alpha A + \beta B) \geq \Delta_x(A)^\alpha \Delta_x(B)^\beta.$$

が成立するが、これも幾何-算術平均の不等式の混合型不等式といえる。Arveson[2] も Fuglede-Kadison のラインで determinant を考察し、不等式を示しているが、トレース内部の作用素の可換性を使っているため、同様のアプローチでは可換性が必要である。A, B 可換のときは、$\Delta_x(AB) = \Delta_x(A)\Delta_x(B)$ となるので、次の補題がいえる。

Arveson 型補題.

$$\Delta_x(A) = \inf\{\langle ABx, x\rangle \mid \Delta_x(B) \geq 1,\ B \in \{A\}'\}.$$

実際、

$$\Delta_x(AB) = \Delta_x(A)\Delta_x(B) \geq \Delta_x(A)$$

となって、逆に、$B = \Delta_x(A)A^{-1}$ ならば $\Delta_x(B) = 1$ で

$$\langle ABx, x\rangle = \Delta_x(A)\langle AA^{-1}x, x\rangle = \Delta_x(A)$$

となることより、この公式が分かる。便宜上可換子環 $\{A\}'$ を使ってあるが、この証明で分かるように tA^{-1} を含む集合であれば十分である。すると、

Arveson 型不等式. A, B:可換のとき、

$$\Delta_x(A + B) \geq \Delta_x(A) + \Delta_x(B).$$

は、infimum の和の分解による不等式にすぎない。この不等式自体は可換性を仮定しなくても成り立つ可能性が高いが、まだ未解決である。

最後に determinant と、算術平均 $\langle Ax, x\rangle$ の間の評価を考える。差の評価と比率の評価であるが、基本的には同じアプローチで、一連の Jensen や Kantorovich の逆向きの不等式と呼ばれている物を示すときに使われている方法である（[7,8,11] 参照）。まず、差を評価するために次の補題を確認する：

補題. f: $[m, M]$ 上 凹 単調増加 微分可能ならば、

$$h(t) \equiv t - f^{-1}(at+b) \leq$$

$$\frac{f(\mu)}{(M-m)+f(m)M-f(M)m} f(M) - f(m) - \mu$$

$$\text{ただし、}\begin{cases} f'(\mu) = a \equiv (f(M)-f(m))/(M-m) \\ \\ b = (Mf(m)-mf(M))/(M-m). \end{cases}$$

実際、$\exists t_0 \in [m, M]; f(\mu) = at_0 + b$. h の凹性より

$$h'(t_0) = 1 - \frac{a}{f'\left(f^{-1}(at_0+b)\right)} = 1 - \frac{a}{f'(\mu)} = 0.$$

となるので、すぐに分かる。特に、$f = \log$ なら、対数平均 L を使って、

$$\frac{1}{a} = L(M, m) = \frac{M-m}{\log M - \log m}$$

となることに注意しよう。すると、

定理４. $0 < m \leq A \leq M$ ならば

$$\langle Ax, x\rangle - \Delta_x(A) \leq L(M, m)\Big(\log L(M, m) + \frac{M\log m - m\log M}{M-m} - 1\Big).$$

となることがわかる。比率についても同様に評価すると、

補題. $m \leq A \leq M$, $a = L(m, M)$, $b = \dfrac{m \log M - M \log m}{\log M - \log m}$ のとき

$$\langle Ax, x\rangle \leq ae^{\frac{b-a}{a}} \Delta_x(A)$$

等号条件：$\langle(\log A)x, x\rangle = \frac{a-b}{a}$, $x = \alpha e_m + \beta e_M$.

となる。これは、$[\log m, \log M]$ 上で

$$e^t \leq at + b \leq ae^{\frac{b-a}{a}} e^t$$

となることを使って、$S = \log A$ として

$$\begin{aligned}\langle e^S x, x\rangle &\leq \langle (aS + b)x, x\rangle \\ &= a\langle Sx, x\rangle + b \leq ae^{\frac{b-a}{a}} e^{\langle Sx, x\rangle},\end{aligned}$$

さらに $e^t < at + b \quad (t \in (\log m, \log M))$ より、

$$\langle e^s x, x\rangle = \langle (aS + b)x, x\rangle \Longleftrightarrow x = \alpha e_m + \beta e_M$$

$$a\langle Sx, x\rangle + b = ae^{\frac{b-a}{a}} e^{\langle Sx, x\rangle} \Longleftrightarrow \langle Sx, x\rangle = (a - b)/a$$

となることで等号条件もいえる。

ところで、比率の評価の方であるが、W.Specht[12] が 1960 年に既に算術平均と幾何平均の比を考察しており、$\kappa = M/m$ について、

$$\textbf{Specht's ratio} : S(\kappa) = \frac{(\kappa - 1)\kappa^{1/(\kappa-1)}}{e \log \kappa}$$

という定数を計算している。このとき、$0 < m \leq x_i \leq M$ となる正数の組について、

$$A(x_1, ..., x_n) \leq S(\kappa)G(x_1, ..., x_n)$$

（ここで、A, G は算術平均と幾何平均をそれぞれ表す）となるのである.この定数はそのままここでの比の評価として採用でき、しかも実は上記の補題と同じ物なのである：

Specht 型定理. $m \le A \le M$, $\kappa = M/m$.

$$\langle Ax, x\rangle \le \frac{(\kappa-1)\kappa^{1/(\kappa-1)}}{e\log\kappa}\Delta_x(A),$$

等号条件：　$m, M \in \sigma_p(A)$　で

$$x = \sqrt{\frac{\kappa}{\kappa-1} - \frac{1}{\log\kappa}}\, e_m + \sqrt{\frac{1}{\log\kappa} - \frac{1}{\kappa-1}}\, e_M,$$

この Specht の比の一般化は Mond-Pečarić[10] が得ているが、彼ら自身は一般化であることはあまり意識していないようである：

Mond-Pečarić の定理. $st \neq 0$, $s < t$ のとき

$$\frac{\langle A^t x, x\rangle^{1/t}}{\langle A^s x, x\rangle^{1/s}} \le \left(\frac{s}{\kappa^s - 1}\right)^{1/t}\left(\frac{\kappa^t - 1}{t}\right)^{1/s}\left(\frac{\kappa^t - \kappa^s}{t-s}\right)^{1/t-1/s}.$$

実際、$t = 1$, $s \downarrow 0$ とすれば Specht 型定理となり、実質上一般化である。

さて、Specht 型定理にもどるが、t 乗を考えることで、すぐに次の系が得られる：

系. すべての実数 t について

$$\langle A^t x, x\rangle \le \frac{(\kappa^t - 1)\kappa^{t/(\kappa^t-1)}}{e\log\kappa^t}\Delta_x(A^t).$$

実際 t が正なら明らかであるが、負の場合にも複数回不等号が反転して同じ形の不等式になることが確かめられる。

一方、古田による Kantorovich 不等式について考察 [7,8] の中で、一般的な定理から次が導けることが指摘されている：

古田定理の系. $0<\ell \le B \le L, \ell>0, L>0, t\neq 0$ のとき、

$$\langle e^{tB}x,x\rangle \le \frac{e^{tL}-e^{t\ell}}{te(L-\ell)}\exp\left(\frac{t(Le^{t\ell}-\ell e^{tL})}{e^{tL}-e^{t\ell}}\right)\exp(t\langle Bx,x\rangle).$$

実は、これも本質的には上記の系と同じである。

以上のように結果としては既に分かっていることかもしれないが、determinant を平均として見詰め直すことによって、また違った側面が見えてくるのではないだろうか。

なお、この発表によって古田先生が chaotic order の特徴づけの証明を簡略化できることに気づかれたことを最後に付記しておく（[4] 参照）。

参考文献

[1] W.B.Arveson: Analyticity in operator algebras, Amer. J. Math., **89** (1967), 578–642.

[2] B.Fuglede and R.V.Kadison, On determinants and a property of the trace in finite factors, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., **36** (1951), 425–431.

[3] B.Fuglede and R.V.Kadison: Determinant theory in finite factors, Ann. of Math., **55** (1952), 520–530.

[4] J.I.Fujii, T.Furuta, T.Yamazaki and M.Yanagida: Simplified proof of characterization of chaotic order via Specht's ratio, to appear in Sci. Math..

[5] J.I.Fujii and Y.Seo: Determinant for positive operators, Sci. Math. **1** (1998), 153-156.

[6] J.I.Fujii, S.Izumino and Y.Seo: Determinant for Positive Operators and Specht's Theorem, Sci. Math., **1** (1998), 307-310.

[7] T.Furuta: Two extensions of Ky Fan generalization and Mond-Pečarić matrix version generalization of Kantorovich inequality, Preprint (1994).

[8] T.Furuta: Extensions of Hölder-McCarthy and Kantorovich inequalities and their applications, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci., **73** (1997), 38–41.

[9] F.Kubo and T.Ando: Means of positive linear operators, Math. Ann., **246** (1980), 205–224.

[10] B.Mond and J.E.Pečarić: Convex Functions, Operators and Matrices, Preprint.

[11] Y.Seo, S.-E.Takahasi and M.Tominaga: Ineequalities of Furuta and Mond-Pečarić, to appear in Math. Japon..

[12] W.Specht: Zur Theorie der elementaren Mittel, Math. Z., **74** (1960), 91–98.